

*На правах рукописи*

**Фокин Александр Борисович**

**Оценка надежности телекоммуникационных сетей  
на основе инверсий их состояний**

Специальность 2.2.15 –  
Системы, сети и устройства телекоммуникаций

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

**Москва – 2024**

Работа выполнена в Федеральном государственном казенном военном образовательном учреждении высшего образования «Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации».

Научный руководитель: Батенков Кирилл Александрович - доктор технических наук, профессор.

Официальные оппоненты: Душкин Александр Викторович - доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Информационная безопасность» федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»;

Бухарин Владимир Владимирович - доктор технических наук, доцент, главный научный сотрудник АО «НИИ «Рубин».

Ведущая организация: Акционерное общество «Научно-технический центр высокоскоростных систем передачи «Супертел ДАЛС».

Защита состоится 24 апреля 2024 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета по защите докторских и кандидатских диссертаций 55.2.002.01 при ордена Трудового Красного Знамени федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский технический университет связи и информатики» по адресу: 111024, Москва, ул. Авиамоторная, д. 8а, МТУСИ, ауд. А-211.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте МТУСИ (<http://srd-mtuci.ru/images/Dis-Fokin/dis-Fokin.pdf>).

Автореферат разослан \_\_\_\_ . \_\_\_\_\_ . 2024г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета 55.2.002.01.  
доктор технических наук, доцент

М. В. Терешонок

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования.** Современные телекоммуникационные сети характеризуются большими размерами и сложностью, что приводит их к высокой подверженности различного рода отказам и, как следствие, выносу на первый план проблемы, связанной с анализом их надежности. Надежность сети является одним из основных факторов, влияющих на качество обслуживания. Задачи анализа надежности характерны не только для телекоммуникаций, но и для систем, чьи компоненты подвержены отказам, например транспортных, энергетических, механических систем, программного обеспечения и др. Главным признаком данных систем значится возможность их представления в форме сети (графа), описывающей взаимосвязь ее отдельных элементов. В большинстве случаев сети разрабатываются с учетом наличия сразу нескольких путей распространения информации между любой парой вершин, что приводит к высокой вероятности существования хотя бы одного маршрута. В идеальном случае эти пути должны быть разнесены либо допускать между любой парой вершин наличие нескольких непересекающихся множеств путей, а также маршрутов, включающих общие ребра.

Для телекоммуникационных сетей постоянная доступность заданного набора вершин является необходимым условием нормального функционирования. Высокая надежность оказывается неотъемлемым требованием любой сети вне зависимости от применяемой технологии: SDH/SONET, OTN, MPLS, IP и др. Для каждой технологии имеются свои механизмы обеспечения отказоустойчивости, играющие важную роль в итоговой надежности соединений, особенности которых необходимо учитывать.

Основной проблемой в данной области значится определение надежности сложноразветвленных телекоммуникационных сетей, а также задание некоторых количественных показателей требуемых характеристик сети, относительно которых оператор может гарантировать качество предоставляемых услуг. В данной работе рассматривается влияние характеристик телекоммуникационной сети на ее итоговую надежность с позиции наиболее часто используемого показателя – коэффициента готовности. Данный показатель входит в базовую структуру соглашения об уровне обслуживания (Service Level Agreement, SLA) для любой услуги связи как показатель надежности организуемой сети.

Определение показателей надежности в сложноразветвленных сетях является трудно вычисляемой задачей, и существующими методами получить за приемлемое время точные значения данных параметров оказывается не всегда возможным. Кроме того, известные методы применимы не для всех мер связности сети и не учитывают механизмы обеспечения отказоустойчивости.

Таким образом, совершенствование существующих и разработка специализированных методов расчета надежности телекоммуникационной сети в рамках заданного типа связности, позволяющих снизить трудоемкость расчетов, а также учитывать применяемые механизмы обеспечения отказоустойчивости, является актуальной задачей.

**Степень разработанности темы.** Существующий методологический аппарат математического моделирования телекоммуникационных сетей, представленный в работах Б. Я. Дудника, Е. А. Кучерявого, В. А. Нетеса, Б. П. Филина, С. Я. Ясинского, и др., ориентирован, прежде всего, на исследование услуг для структур типа «точка-точка», либо полносвязных. В результате наиболее востребованные в настоящее время услуги для многосвязных структур, предоставляемые оконечным пользователям по телекоммуникационной сети, исследуются с серьезными ограничениями с точки зрения возможных точек тяготения циркулирующего трафика.

Теория случайных графов, разработанная в трудах А. М. Райгородского, P. Erdos, A. Rényi и др., рассматривает произвольные свойства случайных графов и не учитывает особенности функционирования телекоммуникационных сетей, определяющие события связности результирующих графов в рамках заданного типа связности.

Методы формирования множеств простейших подграфов, представленные в работах Г. Ш. Цициашвили, S. K. Chaturvedi, K. K. Aggarwal, S. H. Ahmad, R. A. Mishra и др., используют хорошо известные способы полного перебора, которые зачастую приводят к существенным временным и вычислительным затратам при исследовании сложноразветвленных сетей.

Существующие методы расчета надежности телекоммуникационных сетей, разработанные в трудах Б. Я. Дудника, И. А. Рябинина, Б. П. Филина, S. K. Chaturvedi, W. Pino, T. Gomes, R. A. Koopij и др., имеют строгое математическое обоснование в форме последовательности процедур и даже реализованы на ЭВМ, но не учитывают особенности методов резервирования телекоммуникационных сетей.

Таким образом, проблема оценки надежности телекоммуникационных сетей актуальна с позиции разработки более эффективных процедур и методов расчета структурной надежности, а также с точки зрения анализа различных типов связности сети и возможности учета механизмов обеспечения отказоустойчивости.

**Объект исследования** – структурная надежность телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости.

**Предмет исследования** – методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе простейших подграфов (путь, дерево, сечение).

**Целью диссертационного исследования** является разработка методов расчета надежности телекоммуникационной сети с различными типами точек тяготения и поддержкой механизмов обеспечения отказоустойчивости, использующих процедуры формирования множеств простейших подграфов, на основе метода многопеременной инверсии обратных событий связности и несвязности эквивалентных графов.

Для достижения заявленной цели в диссертации были решены следующие научные задачи:

1. Проведен анализ механизмов обеспечения отказоустойчивости, поддерживаемых современными телекоммуникационными сетями, и существующих аналитических методов расчета вероятности связности (коэффициента готовности).

2. Разработаны процедуры формирования множеств простейших подграфов телекоммуникационной сети для:

– двухполюсной связности в виде путей на основе алгоритма поиска в ширину и отбора соответствий по стокам;

– всеполюсной связности в виде остовых деревьев путем анализа декартовых произведений вершинных сечений на связность результирующих графов и проверки уникальности ребер;

– многополюсной связности в виде многополюсных деревьев на основе проверки листьев графа на принадлежность к множеству полюсов;

– двухполюсной связности в виде двухполюсных минимальных сечений на основе проверки сочетаний вершинных сечений на безызбыточность;

– всеполюсной связности в виде всеполюсных минимальных сечений путем анализа декартовых произведений вершинных сечений, включающих исток и сток, а также проверку их на уникальность;

– многополюсной связности в виде многополюсных минимальных сечений на основе отбора сечений, содержащих только полюсные вершины.

3. Разработаны методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий:

– отрицания пересечения событий связности графа, формируемых на основе множеств подграфов путей, остовых деревьев или многополюсных деревьев;

– отрицания пересечения событий несвязности графа, формируемых на основе множеств подграфов минимальных двухполюсных, всеполюсных или многополюсных сечений.

4. Разработан метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости: защитного переключения (protection) и восстановления (restoration), гарантирующий наличие от одного до нескольких маршрутов передачи между заданными источником и стоком.

5. Проведен анализ надежности телекоммуникационной сети, основой которой является магистральная кабельная сеть юга России, поддерживающая механизмы обеспечения отказоустойчивости.

**Научная новизна** результатов исследования состоит в следующем.

1. Разработаны процедуры формирования множеств простейших подграфов телекоммуникационной сети для двух-, все- и многополюсной связностей в виде путей, остовых деревьев, многополюсных деревьев, минимальных сечений, отличающихся от известных отбором альтернатив с соответствующим стоком, перебором декартовых произведений вершинных сечений с учетом неповторяемости ребер, проверками принадлежности листьев подграфов только множеству полюсов, уникальности ребер и контроля добавляемого всеполюсного сечения на уникальность.

2. Разработана рекурсивная процедура приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий, позволяющая в отличие от известных на основе метода многопеременных инверсий отрицания пересечения событий связности графа получать простые формы перехода логических функций к замещению, используемые для расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети.

3. Разработаны методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий отрицаний пересечений событий связности или несвязности графа для различных типов связности сети.

4. Разработан метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, в отличие от известных учитывающий реализованные механизмы обеспечения отказоустойчивости с различными архитектурами, защищаемыми участками и требуемым количеством маршрутов.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Теоретическая значимость работы состоит в совершенствовании процедур формирования множеств простейших подграфов для произвольной связности графа телекоммуникационной сети, а также в развитии методов построения форм перехода логических функций к замещению на основе многопеременных инверсий отрицания пересечения событий связности (несвязности) графа.

Практическая значимость работы заключается в доведении разработанных процедур и методов до программной реализации, позволяющей проводить расчет вероятностей связности (коэффициентов готовности) достаточно разветвленной телекоммуникационной сети произвольной структуры и полюсности, использующей механизмы обеспечения отказоустойчивости.

**Использование и внедрение результатов работы.** Результаты диссертационной работы были использованы и внедрены:

1. В расчетах ООО «Ассоциация специалистов по безопасности» при определении структурной надежности проектируемых сетей.

2. В учебный процесс кафедры «Информационная безопасность» ФГБОУ ВО «ОГУ имени И. С. Тургенева».

**Методология и методы исследования.** Для решения задач диссертационного исследования применялись методы теорий надежности, вероятностей, графов, булевых функций, множеств, алгебры логики и планирования эксперимента.

**Положения, выносимые на защиту.**

1. Процедуры, формирующие множество простейших подграфов телекоммуникационной сети для двух-, все- и многополюсной связности в виде путей, остовых деревьев, многополюсных деревьев, минимальных сечений, позволяют образовывать логические функции связности или несвязности телекоммуникационной сети. Для сложноразветвленной телекоммуникационной сети выигрыш во времени вычисления в среднем по проведенным экспериментам достигает величины до 1,8 раза большей относительно известных методов.

2. Методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий отрицаний пересечений событий связности или несвязности графа предоставляют возможность анализа структурной надежности сети. Число анализируемых элементарных конструкций (подграфов) в ходе процесса редукции исходного графа уменьшается относительно известных методов в два раза при значительном количестве вершин (для более, чем восемнадцати вершин погрешность менее 0,1%).

3. Метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости, позволяет проводить анализ надежности различных архитектур, защищаемых участков и требуемого количества маршрутов, что позволяет учесть эффекты дублирования элементов в различных маршрутах и, как следствие, снять ограничение о независимости путей передачи информации в сложноразветвленных сетях.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Обоснованность и достоверность полученных результатов подтверждается адекватным применением известных методов исследования, соответствующих предметной области, и корректностью методик численного моделирования. Основные результаты докладывались и обсуждались на Международной научно-практической конференции «ИСТ-2020» (г. Нижний Новгород), Международной научно-технической и научно-методической конференции «АПИНО-2020» (г. Санкт-Петербург), Международном научно-техническом форуме «СТНО-2020», «СТНО-2022» (г. Рязань), Всероссийской научно-практической конференции «НПК-2022» (г. Киров).

**Публикации.** Основные положения диссертации опубликованы в 11 работах, 6 из них – в ведущих рецензируемых научно-технических журналах, входящих в перечень ВАК 4 из которых проиндексированы в базе данных Scopus, 5 работ опубликованы в материалах международных, всероссийских и отраслевых конференций. Получен 1 патент на изобретение и 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

**Соответствие паспорту специальности.** Результаты исследования соответствуют паспорту научной специальности 2.2.15. «Системы, сети и устройства телекоммуникаций» по пункту:

- 1: разработка и совершенствование методов исследования, моделирования и проектирования сетей, систем и устройств телекоммуникаций.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и приложения. Основная часть изложена на 154 страницах машинописного текста, содержит 31 рисунок и 9 таблиц. Список литературы состоит из 156 источников. Приложение содержит 2 акта о внедрении и использовании результатов диссертационной работы на 3 страницах машинописного текста.

## Основное содержание работы.

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, определены ее цель и частные научные задачи, необходимые для достижения цели исследования. Сформулированы научные положения, выносимые на защиту, представлена их научная новизна, теоретическая и практическая значимость, приведены сведения о публикациях, апробациях и реализации полученных результатов.

В **первом разделе** диссертационной работы для различных сетевых технологий проанализированы механизмы обеспечения отказоустойчивости телекоммуникационной сети, которые являются основой структурной надежности сети. Проведен анализ существующих методов расчета показателей надежности сложноразветвленных систем, выявлены их недостатки применительно к современным телекоммуникационным сетям. В качестве ключевого показателя, обеспечивающего надежность сети, выбран коэффициент готовности, характеризующий качество услуги связи с учетом качества работы сети, сформулирована научная задача.

**Второй раздел** посвящен разработке процедур для формирования множеств простейших подграфов для различных состояний телекоммуникационной сети с двух-, все- и многополюсной связностью.

В виду большого количества символов и их повторений для однозначности толкования введены следующие обозначения:  $X$  – матрица,  $x$  – вектор,  $S$  – множество,  $s$  – событие.

Формирование множеств простейших подграфов осуществляется на основе известной обобщенной модели Эрдеша–Реньи, где присутствуют только те ребра, которые соответствуют линиям связи телекоммуникационной сети. Рассматривается случайный граф  $G = (V, L)$ , в котором задано множество вершин  $V = \{1, \dots, v\}$  и множество ребер  $L = \{1, \dots, l\}$ . Вероятность существования ребра (работоспособность линии связи) между вершинами  $i$  и  $j$  обозначена через  $p_{i,j} \in [0, 1]$  и не зависит от всех остальных  $l - 1$  ребер, вершины могут выходить из строя с вероятностью  $p_i \in [0, 1]$ .

Вероятность  $p_G$  существования конкретного графа  $G$  определяется из соотношения

$$p_G = \prod_{(i,j) \in L} p_{i,j} \prod_{(i,j) \notin L} (1 - p_{i,j}),$$

где  $(i, j) \notin L$  – неработоспособные ребра.

Тогда вероятность  $p(S)$  наличия у случайного графа  $G$  некоторого свойства будет трактоваться как сумма вероятностей  $p_G$  существования графов, принадлежащих множеству графов  $S$ , для которого это свойство выполняется:

$$p(S) = \sum_{G \in S} p_G. \quad (1)$$

В контексте надежности сети под этим свойством понимают связность сети. Связность между заданным набором вершин характеризуется тремя мерами: двухполюсной, многополюсной и всеполюсной. Рассмотрим событие связности

как существование некоторого подграфа  $S_i$  в конкретной реализации графа  $G$ , содержащего заданные вершины исходного случайного графа  $G$  и однозначно являющегося деревом, листьями которого могут быть только эти заданные вершины. Тогда множество  $S$  графов, для которого выполняется свойство связности, имеет вид:

$$S = \{G: \exists S_i \subseteq G\},$$

т. е. множество  $S$  состоит из всех графов  $G$ , для которых существует хотя бы один подграф  $S_i$ , содержащийся в графе  $G$ .

Для двухполюсной сети подграфами  $S_i$  оказываются деревья, содержащие заданную пару вершин и являющиеся путями, для многополюсной сети – деревья, имеющие заданный набор вершин, для всеполюсной сети – остовые деревья, включающие все вершины случайного графа  $G$ .

Анализируя вышесказанное можно сказать, что выражение (1) является математической моделью телекоммуникационной сети, учитывающей различные типы связности сети. А события связности (несвязности) вершин графа определяются множеством простых подграфов: путь, дерево, сечение.

Процесс формирования множества простейших подграфов, определяющих события связности (несвязности) графа по предложенным процедурам, разбит на этапы. Исходными данными для формирования множеств подграфов является матрица смежностей  $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,v}$  случайного графа  $G$ , где

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } p_{i,j} \neq 0, \\ 0, & \text{если } p_{i,j} = 0. \end{cases}$$

#### **Процедура формирования множества путей для двухполюсного графа сети.**

1 этап. Синтезируют множество путей от источника  $v_s$  ко всем возможным вершинам. Образуют матрицы путей  $\mathbf{W}_m$  длины  $m$  так, чтобы не образовывались петли:

$$\mathbf{W}_1^{(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} v_s \\ \min(i) \end{bmatrix} : a_{v_s,i} = 1, i = 1, \dots, v \right\}, \quad (2)$$

$$\mathbf{W}_1^{(k)} = \left\{ \begin{bmatrix} v_s \\ \min(i) \end{bmatrix} : a_{v_s,i} = 1, [\mathbf{W}_1]_{2,k-1} < v, i = [\mathbf{W}_1]_{2,k-1} + 1, \dots, v \right\}, k \leq v, \quad (3)$$

где  $\mathbf{X}^{(k)}$  –  $k$ -й столбец матрицы  $\mathbf{X}$ ;  $\begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$  – вектор, построчно составленный из элементов  $i$  и  $j$ ;  $[\mathbf{X}]_{i,j}$  – элемент матрицы  $\mathbf{X}$ , стоящий на  $i$ -й строке в  $j$ -м столбце.

Последующие матрицы путей  $\mathbf{W}_m$ ,  $m = 2, \dots, v - 1$ , формируются таким образом, чтобы избежать образования петель и являются матрицами путей длины  $m$ .

$$\mathbf{W}_m^{(k)} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{m-1}^{(i)} \\ \min(j) \end{bmatrix} : a_{s',j} = 1, j \notin \mathbf{W}_{m-1}^{(i)}, [\mathbf{W}_m]_{m+1,k-1} < v, \right. \\ \left. j = [\mathbf{W}_m]_{m+1,k-1} + 1, \dots, v, s' = [\mathbf{W}_{m-1}]_{m,i}, i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_{m-1}) \right\}, \quad (4)$$

где  $\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ j \end{bmatrix}$  – блочный вектор, составленный из вектора  $\mathbf{x}$  и скаляра  $j$ ;  $j \notin \mathbf{W}_{m-1}^{(i)}$  – обозначает, что скаляр  $j$  не равен ни одному из элементов вектора  $\mathbf{W}_{m-1}^{(i)}$ ;  $\mathbf{W}_{m-1}^{(i)}$  –

$i$ -й столбец матрицы  $\mathbf{W}_{m-1}$ ;  $[\mathbf{W}_m]_{m+1,k-1}$  – элемент матрицы  $\mathbf{W}_m$ , находящийся в  $m + 1$  строке и  $k - 1$  столбце;  $\text{cols}(\mathbf{X})$  – число столбцов матрицы  $\mathbf{X}$ .

2 этап. Отбирают из полученного множества только те пути, стоки которых совпадают с заданным стоком  $v_t$ :

$$\mathbf{W}'_m \langle 1 \rangle = \left\{ \mathbf{W}_m \langle \min(i) \rangle : v_t = [\mathbf{W}_m]_{m+1,i}, i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_m) \right\}, \quad (5)$$

$$\mathbf{W}'_m \langle k \rangle = \left\{ \mathbf{W}_m \langle \min(i) \rangle : v_t = [\mathbf{W}_m]_{m+1,i}, [\mathbf{W}'_m]_{m+1,k-1} < \text{cols}(\mathbf{W}_m), \right. \\ \left. i = [\mathbf{W}'_m]_{m+1,k-1} + 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_m) \right\}. \quad (6)$$

Если между истоком  $v_s$  и стоком  $v_t$  нет пути длины  $m$ , матрица  $\mathbf{W}'_m$  не формируются.

3 этап. Преобразуют полученные матрицы путей  $\mathbf{W}'_m$ ,  $m = 1, \dots, v - 1$  к общему виду единой матрицы путей  $\mathbf{W} = \{w_{i,j}\}_{i=1,\dots,l, j=1,\dots,s}$ , которая имеет векторную

форму, где  $s$  – общее число путей. Каждый столбец матрицы  $\mathbf{W}$  соответствует определенному пути, а строка – ребру:

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \mathbf{W}'_m \langle k \rangle, \\ 0, & \text{если } i \notin \mathbf{W}'_m \langle k \rangle, \end{cases} \quad j = \begin{cases} k, & \text{если } j \leq \text{cols}(\mathbf{W}'_1), \\ k + \sum_{r=1}^{m-1} \text{cols}(\mathbf{W}'_r), & \text{если } j > \text{cols}(\mathbf{W}'_1). \end{cases} \quad (7)$$

**Процедура формирования множества остовых деревьев для всеполюсного графа сети.** Базируется на методе формирования множества деревьев в форме декартового произведения вершинных сечений. Отличием выступает подпроцедура проверки связности получаемого подграфа.

1 этап. Синтезируют множество вершинных сечений. Преобразуют матрицу смежности в модифицированную матрицу смежности  $\mathbf{A}' = \{a'_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$ , учитывающую нумерацию ребер. Исключают вершину, валентность которой имеет максимальную величину, так как она породит наибольшее число комбинаций в декартовом произведении:  $v_e = \min[\arg \max(\mathbf{A}\mathbf{1}_v)]$ , где  $\mathbf{1}_v = \{u_i\}_{i=1,\dots,v}$  – единичный вектор, длины  $v$ ,  $u_i = 1$ .

Множество вершинных сечений синтезируют в форме векторов сечений  $\mathbf{c}_r$ ,  $r = 1, \dots, v - 1$ , путем выделения по строкам ненулевых элементов матрицы  $\mathbf{A}'$ :

$$[\mathbf{c}_r]_k = \{a'_{i,\min(j)} : a_{i,j} = 1, [\mathbf{c}_i]_{k-1} < v, j = [\mathbf{c}_i]_{k-1} + 1, \dots, v\}, \\ i \neq v_e, i = 1, \dots, v, r = \begin{cases} i, & \text{если } i < v_e, \\ i - 1, & \text{если } i > v_e. \end{cases} \quad (8)$$

2 этап. Находят декартово произведение до  $(v - 2)$ -го полученного множества сечений с учетом неповторяемости ребер:

$$\mathbf{W}_r \langle k \rangle = \left\{ \left[ \begin{array}{c} \mathbf{W}_{r-1} \langle i \rangle \\ [\mathbf{c}_r]_j \end{array} \right] : [\mathbf{c}_r]_j \notin \mathbf{W}_{r-1} \langle i \rangle, i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_{r-1}), j = 1, \dots, \text{rows}(\mathbf{c}_r) \right\}, \\ r = 2, \dots, v - 2, \quad (9)$$

где  $\text{rows}(\mathbf{x})$  – число строк вектора  $\mathbf{x}$ .

3 этап. Вычисляют последнее произведение  $(v - 1)$ -го множества сечений, одновременно контролируя уникальность ребер и связность полученного подграфа:

$$\mathbf{W}_{v-1}^{(k)} = \left\{ \left[ \begin{array}{c} \mathbf{W}_{v-2}^{(i)} \\ [\mathbf{c}_{v-1}]_j \end{array} \right] : [\mathbf{c}_{v-1}]_j \notin \mathbf{W}_{v-2}^{(i)}, S \left( \left[ \begin{array}{c} \mathbf{W}_{v-2}^{(i)} \\ [\mathbf{c}_{v-1}]_j \end{array} \right] \right) = 1, \right. \\ \left. i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W}_{v-2}), j = 1, \dots, \text{rows}(\mathbf{c}_{v-1}) \right\}, \quad (10)$$

где  $S(\mathbf{X})$  – оператор проверки связности, результат выполнения которого равен единице, если граф, состоящий из ребер  $\mathbf{X}$ , связный, и нулю, если нет.

В результате формируют матрицу деревьев  $\mathbf{W}_{v-1}$  исследуемого графа, где каждое дерево формализовано как пересечение номеров входящих в него ребер.

4 этап. Преобразуют матрицу деревьев  $\mathbf{W}_{v-1}$  в матрицу остовых деревьев  $\mathbf{W} = \{w_{i,j}\}_{i=1,\dots,l, j=1,\dots,s}$  векторной формы, элементы которой равны:

$$w_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \mathbf{W}_{v-1}^{(j)}, \\ 0, & \text{если } i \notin \mathbf{W}_{v-1}^{(j)}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, s, \quad (11)$$

где  $s$  – общее число остовых деревьев.

**Процедура формирования множества многополюсных деревьев для многополюсного графа сети.** Базируется на последовательном преобразовании всего множества остовых деревьев в многополюсные. В отличие от известных способов используется свойство многополюсного дерева, а в качестве листьев включаются только полюса. В результате чего из остового дерева удаляются висячие вершины и формируется требуемый подграф.

1 этап. Синтезируют множество остовых деревьев аналогично предыдущей процедуре согласно (8)–(11), в результате чего образуется матрица остовых деревьев  $\mathbf{W}$ .

2 этап. Определяют множество неполюсных вершинных сечений, удаляя неполюсные вершины  $v'$  и образуя матрицы неполюсных вершинных сечений  $\mathbf{C} = \{c_{i,j}\}_{i=1,\dots,l, j=1,\dots,v-v'}$  на основе (8). Матрица формируется путем процедуры сравнения элементов модифицированной матрицы смежностей  $\mathbf{A}'$  с индексами образуемой матрицы  $\mathbf{C}$  сечений:

$$c_{i,j} = \{a_{k,j} : a'_{k,j} = i, \text{ если } k = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, v - v'. \quad (12)$$

3 этап. Формируют в матричном виде множество многополюсных деревьев путем удаления висячих неполюсных вершин и избыточных остовых деревьев. Удаление из остовых деревьев листьев представляется в виде процедуры сравнения текущего вектора остового дерева  $\mathbf{W}^{(k)}$  со всеми столбцами матрицы неполюсных сечений  $\mathbf{C}$ . Сравнение проводится до полного отсутствия неполюсных листьев. Образуют вектор  $\mathbf{w}_r$ , содержащий номера ребер подграфа по закону:

$$\mathbf{w}_r = \left\{ \mathbf{w}_{r-1} - \mathbf{q} : \mathbf{w}_{r-1} \neq \mathbf{w}_{r-2}, \mathbf{q} = \left\lfloor \frac{\mathbf{w}_{r-1} + \mathbf{C}^{(i)}}{2} \right\rfloor, \right. \\ \left. \mathbf{q}^T \mathbf{1}_l = 1, i = 1, \dots, v - v' \right\}, r = 1, \dots \quad (13)$$

Когда вектор подграфа  $\mathbf{w}_r$  не изменяется ( $\mathbf{w}_{r-1} = \mathbf{w}_{r-2}$ ), то он превращается в многополюсное дерево, формализуемое как столбец матрицы  $\mathbf{W}' = \{w'_{i,j}\}_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,\dots,s}}$ , элементы которой определяются как:  $w'_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in L'_j, \\ 0, & \text{если } i \notin L'_j, \end{cases}$  где  $L'_j \in L'$  –  $j$ -е многополюсное дерево;  $s$  – общее число многополюсных деревьев. Следовательно  $\mathbf{W}'^{(k)} = \mathbf{w}_r$ .

Удаление избыточных остовых деревьев производится путем сравнения, но уже текущего многополюсного дерева  $\mathbf{w}_r$  и всех нерассмотренных остовых деревьев  $\mathbf{W}^{(k)}$ :

$$\mathbf{W}^{(r)} = \{\mathbf{W}^{(j)} : \mathbf{w}_r \subset \mathbf{W}^{(j)}, \text{ если } j = k + 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{W})\}.$$

После просмотра всех остовых деревьев формируют матрицу многополюсных деревьев  $\mathbf{W}'$ .

**Процедура формирования множества минимальных двухполюсных сечений для двухполюсного графа сети.** Базируется на методе, использующем в качестве основы матрицу связностей и предполагающем последовательный перебор всех сочетаний вершинных сечений, начиная с истока и стока с введением дополнительной процедуры для проверки добавляемого сечения на безызыточность.

1 этап. Синтезируют  $v$  множеств вершинных сечений на основе (12), выделяя в отдельный блок сечение истока и стока. Образуют матрицы полюсных  $\mathbf{C}' = \{c'_{i,j}\}_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,2}}$  и неполюсных  $\mathbf{C} = \{c_{i,j}\}_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,v-2}}$  вершинных сечений путем сравнения элементов модифицированной матрицы смежностей  $\mathbf{A}'$  с индексами образуемых матриц сечений  $\mathbf{C}'$  или  $\mathbf{C}$ :

$$c'_{i,j} = \left\{ a_{k,r} : a'_{k,r} = i, k = 1, \dots, v, r = \begin{cases} v_s, j = 1, \\ v_t, j = 2, \end{cases}, i = 1, \dots, l, \right. \quad (14)$$

$$c_{i,j} = \left\{ a_{k,r} : a'_{k,j} = i, k = 1, \dots, v, r = \begin{cases} j, & \text{если } j < \min(v_s, v_t), \\ j - 1, & \text{если } \min(v_s, v_t) < j < \max(v_s, v_t), \\ j - 2, & \text{если } j > \max(v_s, v_t), \end{cases} \right. \quad (15) \\ i = 1, \dots, l, j = 1, \dots, v - 2.$$

2 этап. Находят декартово произведение неполюсных сечений, с учетом неповторяемости ребер, отсутствия ребер, принадлежащих истоку, и невключенности всех ребер сечения стока в получаемое множество. Для этого образуют вектора  $\mathbf{w}_k$ , являющиеся векторами неполюсных вершинных сечений, содержащие ребра сечения истока и не включающие все ребра сечения стока с удалением повторяющихся ребер:

$$\mathbf{w}_k = \left\{ \mathbf{c}' : \mathbf{c}' = \mathbf{1}_l - \text{sign}(\mathbf{c} - \mathbf{1}_l) \odot \text{sign}(\mathbf{c} - \mathbf{1}_l), \right. \quad (16)$$

$$\mathbf{c} = \sum_{i_1=1}^{v-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{v-2} \dots \sum_{i_r=i_{r-1}+1}^{v-2} \sum_{j=1}^r \mathbf{c}^{(i_j)}, \text{ если } i_j \leq v-2,$$

$$\max(\mathbf{c} + \mathbf{C}'^{(1)}) = 2, \min(\mathbf{c} - \mathbf{C}'^{(2)}) \neq 0, r = 2, \dots, v-3 \},$$

где  $\mathbf{x}' = \{x'_i\} = \text{sign}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$  – вектор, полученный из исходного вектора  $\mathbf{x} = \{x_i\}$ ,

каждый элемент которого  $x'_i = \frac{x_i}{|x_i|} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i > 0 \\ 0, & \text{если } x_i = 0 \\ -1, & \text{если } x_i < 0 \end{cases}$ ;  $\text{sign}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$  – функция

сигнум;  $\odot$  – произведение Адамара; тождество  $\max(\mathbf{c} + \mathbf{C}'^{(1)}) = 2$  – операция выявления неуникальных ребер сечения истока  $\mathbf{C}'^{(1)}$  в неплюсном сечении  $\mathbf{c}$ ; неравенство  $\min(\mathbf{c} - \mathbf{C}'^{(2)}) \neq 0$  – операция выявления присутствия в сечении  $\mathbf{c}$  всех ребер сечения стока  $\mathbf{C}'^{(2)}$ .

3 этап. Формируется матрица двухполюсных сечений  $\mathbf{W}$ , путем вычисления декартового произведения полученных векторов  $\mathbf{w}_k$  на вектор сечения истока  $\mathbf{C}'^{(1)}$ , с удалением неуникальных ребер, проверкой добавляемого сечения на безызбыточность и добавлении сечений истока и стока:

$$\mathbf{W} = \mathbf{C}', \quad (17)$$

$$\mathbf{W}^{(k+2)} = \{\mathbf{w}: \mathbf{w} = \mathbf{1}_l - (\mathbf{w}_k + \mathbf{C}'^{(1)} - \mathbf{1}_l) \odot (\mathbf{w}_k + \mathbf{C}'^{(1)} - \mathbf{1}_l)\}, \quad (18)$$

$$\min(\mathbf{W}^{(i)} - \mathbf{w}) \neq 0, \min(\mathbf{w} - \mathbf{W}^{(i)}) \neq 0, i = 1, \dots, k-1, k = 1, \dots, \text{rows}(\mathbf{w}),$$

где неравенство  $\min(\mathbf{W}^{(i)} - \mathbf{w}) \neq 0$  соответствует определению принадлежности множества ребер добавляемого сечения  $\mathbf{w}$  множеству ребер уже добавленного сечения  $\mathbf{W}^{(i)}$ , а неравенства  $\min(\mathbf{w} - \mathbf{W}^{(i)}) \neq 0$  – наоборот.

**Процедура формирования множества минимальных всеполюсных сечений для всеполюсного графа сети.** Базируется на методе, использующем в качестве основы матрицу связностей и предполагающем последовательный перебор всех сочетаний вершинных сечений, не включая одну из вершин, считаемую терминальной. В отличие от процедур, используемых в этом методе, более простым решением оказался контроль добавляемого сечения на уникальность.

1 этап. Синтезируют  $v$  множеств вершинных сечений, в виде вектора-строки номеров вершинных сечений  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{c}'^T = \{c'_i\}_{i=1, \dots, v-1}$ , где  $T$ - оператор транспонирования. Если не рассматривать сечение первой вершины, то

$$c'_i = i + 1, i = 1, \dots, v-1. \quad (19)$$

Первое уникальное всеполюсное сечение графа, т. е. первый столбец матрицы всеполюсных сечений  $\mathbf{W}$  формируют путем анализа первого столбца матрицы смежностей  $\mathbf{A}$ :

$$w_{i,1} = \{a_{j,1}: a'_{j,1} = i, j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l. \quad (20)$$

Оставшиеся  $v-1$  вершинные сечения образуют столбцы матрицы всеполюсных сечений  $\mathbf{W}$  в случае их уникальности.

2 этап. Анализируют на неповторяемость полученные  $v - 1$  вершинные сечения и формируют исходное множество сочетаний вершинных сечений:

$$\mathbf{W}^{(k)} = \{\mathbf{w}: \min(\mathbf{w} - \mathbf{W}^{(i)}) \neq 0, i = 1, \dots, k - 1\}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1, \dots, l}$  – вспомогательный вектор, идентифицирующий вершинное сечение,

$$w_i = \{a_{j,k}: a'_{j,k} = i, j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l, k = 2, \dots, v. \quad (22)$$

Образуют комбинации вершинных сечений в виде матриц  $\mathbf{C}_r$  сочетаний порядка  $r$ ,  $r = 1, \dots, v - 1$ . Предел перебора номеров вершин, определяется номером максимальной инцидентной вершины и задается в виде вектора  $\mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1, \dots, v-1}$ , элемент которого находится по матрице  $\mathbf{A}$  смежностей:

$$c_i = \{\max(j): a_{i+1,j} = 1, \text{ если } j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, v - 1. \quad (23)$$

Матрицы  $\mathbf{C}_r$  образуются в результате перебора в первую очередь по номерам  $i$  столбцов предыдущих матриц, потом по номерам  $j$  всех допустимых вершинных сечений:

$$\mathbf{C}_r^{(k)} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{r-1}^{(i)} \\ c'_j \end{bmatrix} : i = 1, \dots, \text{cols}(\mathbf{C}_{r-1}), \text{ если } [\mathbf{C}_{r-1}^{(i)}]_{r-1} < c_{[\mathbf{C}_{r-1}^{(i)}]_{r-1}}, \right. \\ \left. j = [\mathbf{C}_{r-1}^{(i)}]_{r-1} + 1, \dots, c_{[\mathbf{C}_{r-1}^{(i)}]_{r-1}} \right\}. \quad (24)$$

3 этап. Проверяется уникальность добавляемого сечения. Для этого для каждого  $-$ го сочетания вычисляется дополнительный вектор  $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1, \dots, l}$ , идентифицирующий это сочетание:

$$w_i = \left\{ w: w = \sum_{r'=1}^r a_{j, [\mathbf{C}_k^{(k')}]_{r'}} , \text{ если } a'_{j, [\mathbf{C}_k^{(k')}]_{r'}} = i, j = 1, \dots, v \right\}, \\ i = 1, \dots, l, k = 2, \dots, v. \quad (25)$$

Далее из вектора  $\mathbf{w}$  удаляются повторяющиеся ребра:

$$\mathbf{w}' = \mathbf{1}_l - \text{sign}(\mathbf{1}_l - \mathbf{w}) \odot \text{sign}(\mathbf{1}_l - \mathbf{w}), \quad (26)$$

и выполняется проверка на неповторяемость:

$$\mathbf{W}^{(k)} = \{\mathbf{w}': \min(\mathbf{w}' - \mathbf{W}^{(i)}) \neq 0, \text{ если } i = 1, \dots, k - 1\}. \quad (27)$$

**Процедура формирования множества минимальных многополюсных сечений для многополюсного графа сети.** Процедура аналогична формированию множества минимальных всеполюсных сечений выражения (19)–(27) и отличается процедурой отбора используемых для образования матрицы сечений комбинаций, из всего множества которых сохраняют лишь те, которые содержат полюсные вершины.

Рассчитывается вектор-строка номеров вершинных сечений по (19):

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{c}'^T = \{c'_i\}_{i=1, \dots, v-1}.$$

Образуют вектор, содержащий номера вершин, не являющихся полюсами  $\mathbf{k}' = \{i: i \notin \mathbf{k}, \text{ если } i = 1, \dots, v\}$ , где  $\mathbf{k} = \{k_i\}_{i=1, \dots, v}$  – вектор вершин-полюсов. Первый столбец матрицы многополюсных сечений  $\mathbf{W}$  формируется путем анализа не только первого столбца матрицы смежностей  $\mathbf{A}$ , но и только в том случае, если первая вершина является полюсом:

$$w_{i,1} = \{a_{j,1}: i \in \mathbf{k}, \text{ если } a'_{j,1} = i, j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l.$$

Оставшиеся  $v - 1$  вершинных сечений образуют столбцы матрицы многополюсных сечений  $\mathbf{W}$  только в случае их уникальности и принадлежности к множеству полюсов. Для этого аналогично выражению (22) вычисляется вектор  $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1, \dots, l}$ , идентифицирующий это вершинное сечение по выражению:

$$w_i = \{a_{j,k}: i \in \mathbf{k}, \text{ если } a'_{j,k} = i, j = 1, \dots, v\}, i = 1, \dots, l, k = 2, \dots, v, \quad (28)$$

который и проверяется на неповторяемость в соответствии с (21).

Далее образуют комбинации вершинных сечений в форме матриц  $\mathbf{C}_r$  сочетаний в соответствии с (23)–(24).

Дополнительно к выражению (25) проверяется принадлежность используемых вершин к множеству полюсов:

$$w_i = \left\{ w: w = \sum_{r'=1}^r a_{j, [c_k^{(k')}]}_{r'}, \text{ если } i \in \mathbf{k}, a'_{j, [c_k^{(k')}]}_{r'} = i, j = 1, \dots, v \right\} \quad (29)$$

$$i = 1, \dots, l, k = 2, \dots, v.$$

Исключение дублирующих ребер и проверка их уникальности выполняются по формулам (26)–(27). В итоге образуется матрица  $\mathbf{W}$  многополюсных сечений.

В качестве примера рассмотрена реализация предложенных процедур на случайном мостиковом графе  $G$  для двухполюсной сети, где  $v_s$  – первая, а  $v_t$  – четвертая вершины (рисунок 1), выводы основных результатов вычислений представлены в диссертации.

Реализация вычислительных процедур выполнена на стационарной ПЭВМ.

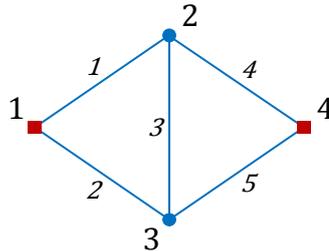


Рисунок 1 – Мостиковый двухполюсный граф

Исходными данными для расчета является матрица смежностей графа  $G$  данной сети:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

С использованием предложенных процедур формирования множества путей по (2)–(7) и минимальных двухполюсных сечений по (14)–(18) вычисляется их количество. Путей четыре: 1 –  $\{1, 4\}$ , 2 –  $\{2, 5\}$ , 3 –  $\{1, 3, 5\}$ , 4 –  $\{2, 3, 4\}$ . Сечений четыре: 1 –  $\{1, 2\}$ , 2 –  $\{4, 5\}$ , 3 –  $\{1, 3, 5\}$ , 4 –  $\{2, 3, 4\}$ . Тогда матрицы путей  $\mathbf{W}_t$  и двухполюсных сечений  $\mathbf{W}_s$  имеют вид:

$$\mathbf{W}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Формирование множеств простейших подграфов с всеполюсной и многополюсной связностью по предложенным процедурам приведены в работе.

Общий анализ результатов формирования простейших подграфов для сложноразветвленных телекоммуникационных сетей, основанный на предложенных процедурах, показал, что выигрыш по времени по проведенным экспериментам достигает величины до 1,8 раза большей относительно известных методов, таких как методы поиска на основе матрицы связности (traversing through connection matrix и cut sets enumeration using connection matrix) (рисунки 2–4).

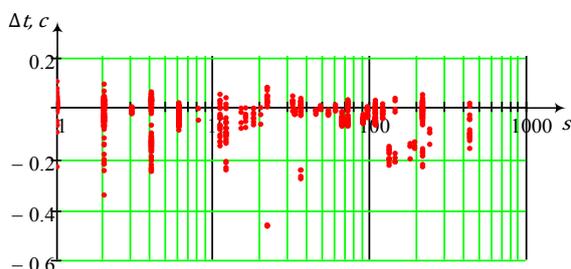


Рисунок 2 – Зависимость выигрыша  $\Delta t$  во времени выполнения процедуры формирования путей от их количества  $s$

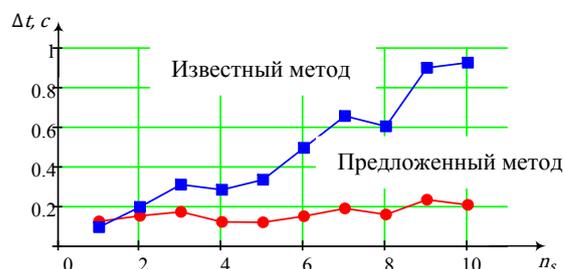


Рисунок 3 – Зависимость выигрыша  $\Delta t$  во времени выполнения процедуры формирования путей от количества  $n_s$  одновременно получаемых их множеств

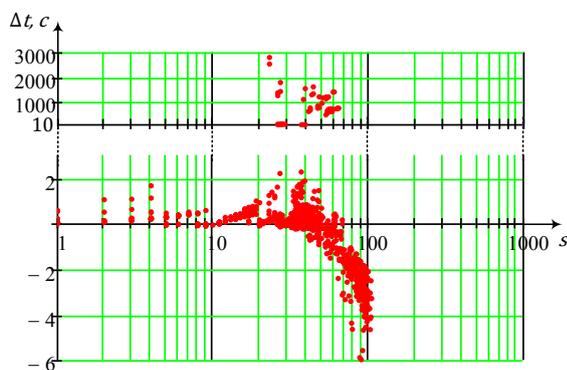


Рисунок 4 – Зависимость выигрыша  $\Delta t$  во времени выполнения процедуры формирования сечений от их количества  $s$

**Третий раздел** посвящен разработке методов расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременной инверсии (Multiple Variable Inversion, MVI) отрицаний пересечений событий связности или несвязности графа.

Расчет вероятности связности большой и сложной по структуре телекоммуникационной сети – это трудоемкий процесс вследствие огромного

числа переменных в результирующем выражении. Наиболее предпочтительным подходом является метод, основанный на представлении события связности сети в виде сумм произведений несовместных событий, получивший название метода объединения с учетом эффекта поглощения. Но даже модификации этого метода, использующие многопеременную инверсию, предложенную в 1988 г. К. Д. Хейдтманном, как расширение метода однопеременной инверсии имеют существенный недостаток, связанный с необходимостью сравнительного анализа каждого слагаемого со всеми ранее рассмотренными на предмет уникальности содержащихся ребер. Для устранения подобных повторяющихся процедур предлагается рассмотреть не объединение событий связности (несвязности), вырождающееся в сумму несовместных произведений, а пересечение противоположных событий, приводящее также к подобной сумме, но для получения которой нет необходимости выполнять многопеременную инверсию для каждого из слагаемых над всеми ранее проанализированными.

Тогда общий подход по расчету вероятности связности на основе инверсий состояний сети заключается в использовании принципа двойственности, который позволяет записать событие  $\bar{S}$  несвязности графа  $G$  как пересечение событий  $\bar{S}_i$  несвязности типовых подграфов (путь, дерево) при условии, что все события  $\bar{S}_i$  независимы:

$$\bar{S} = \bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i.$$

Это позволяет на основе формулы полной вероятности выразить вероятность  $P(S)$  связности графа на основе вероятностей событий  $\bar{S}_i$  несвязности подграфов:

$$P(S) = 1 - P(\bar{S}) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i\right). \quad (30)$$

Достоинством данного выражения является то, что дальнейший переход к вероятностной форме не потребует рассмотрения во всех суммах инверсии всех ранее учтенных подграфов, а необходимо рассмотреть вопрос, связанный с приведением событий несвязности к объединению независимых событий.

Процедура приведения события несвязности графа к объединению независимых событий представлена в форме рекурсии, каждый этап которой ассоциируется с добавлением нового события  $\bar{S}_i$  несвязности подграфа. Этап включает две итерации: на первой выполняется операция поглощения ( $\cup$ ) при условии присутствия события связности, а на второй процедура расщепления ( $\cap$ ) до момента, пока события не окажутся независимыми.

Сущность операции поглощения заключается в исключении (поглощении) из двух зависимых событий общих для них элементов

$$ab \bar{a}c = ab\bar{c},$$

а расщепления – в разбиении нескольких зависимых событий на независимые

$$\overline{ab \bar{a}c} = \bar{a} \cup (a \bar{b} \bar{c}),$$

где  $a, b, c$  – некоторые взаимонезависимые события.

Возможность получения всех сечений графа позволяет провести модификацию подхода к расчету вероятности  $P(S)$  связности графа с использованием сечений на основе формулы полной вероятности, выраженной на основе вероятностей событий  $\bar{S}_i$  связности сечений:

$$P(S) = P\left(\bigcap_{i=1}^s \bar{S}_i\right). \quad (31)$$

Преимущество данного подхода заключается в том, что число сечений рассматриваемых на практике графов обычно меньше количества многополюсных деревьев, что, по крайней мере, уменьшает число перебираемых альтернатив и зачастую приводит к существенному снижению вычислительной сложности.

Для удобства расчетов на ПЭВМ в работе представлены матричные формы представления операций и выражений для событий связности (несвязности) деревьев и сечений, операций поглощения и расщепления, приведения событий несвязности к объединению независимых событий.

Так на основе матриц деревьев и сечений  $\mathbf{W}$  рассчитывается приведенная матрица деревьев и сечений  $\mathbf{S}$ , представляющая события несвязности или связности:

$$\mathbf{S} = \mathbf{W} \odot [\mathbf{1}_l(\mathbf{u}_s + \mathbf{1}_s)^T] - \mathbf{1}_l \mathbf{1}_s^T, \quad (32)$$

где  $\mathbf{u}_s = \{u_i\}_{i=1,\dots,s}$  – вектор размера  $s$ , составленный из возрастающих по порядку целых чисел, начиная с единицы,  $u_i = i$ ;  $\mathbf{1}_l = \{u_i\}_{i=1,\dots,l}$  – единичный вектор длины  $l$ ,  $u_i = 1$ ;  $\mathbf{1}_l \mathbf{1}_s^T = \{u_{i,j}\}_{\substack{i=1,\dots,l, \\ j=1,\dots,s}}$  – матрица размера  $l \times s$ , составленная из одних единиц,  $u_{i,j} = 1$ .

Матричная форма операции поглощения:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cup \mathbf{b} = \text{sign}(\mathbf{a} \odot \mathbf{a}) \odot (\mathbf{b} + \mathbf{1}_l) - \mathbf{1}_l \quad (33)$$

и расщепления:

$$\mathbf{C} = \mathbf{a} \cup \mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{D} \odot \mathbf{E}, & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) > \max(\mathbf{b}), \\ [(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{1}_l) \quad -\mathbf{1}_l \quad -\mathbf{1}_l], & \text{если } \max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leq \max(\mathbf{b}), \end{cases} \quad (34)$$

$$\mathbf{D} = \text{sign}[\max(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{1}_l - (\mathbf{a} + \mathbf{b})] \cdot \mathbf{1}_3,$$

$$\mathbf{E} = [(\mathbf{a} + \mathbf{1}_l) - \mathbf{1}_l \quad \mathbf{a} \quad (\mathbf{b} + \mathbf{1}_l) - \mathbf{1}_l],$$

где  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=1,\dots,l}$ ,  $\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1,\dots,l}$ ,  $\mathbf{C} = \{c_{i,j}\}_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=1,2,3}}$  – векторы и матрица событий соответственно.

Процедура приведения событий несвязности к объединению независимых событий представлена в виде рекурсии, состоящей из нескольких шагов, включающих операции расщепления и поглощения, применяемых к матрицам и их элементам по определенным правилам. В результате из приведенной матрицы деревьев (сечений)  $\mathbf{S}$  образуется матрица независимых событий связности (несвязности)  $\mathbf{Y}$ , на основе которых ведется расчет вероятности связности.

Далее для расчета вероятности связности графа необходимо осуществить переход от матрицы независимых событий к вероятностной функции, что позволяет представить метод расчета вероятностей связности (коэффициентов

готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий отрицаний пересечений событий несвязности подграфов (30), как набор операций над векторами и матрицами:

$$P(S) = 1 - \sum_{i=1}^{s'} |\text{dg}[\text{sign}(\mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)}) \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p}]| \times \prod_{k=1}^{\max(\mathbf{Y}^{(i)})} (1 - |\text{dg}\{\text{sign}[(\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l) \odot (\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l)] \odot (\mathbf{1}_l - \mathbf{p}) + \mathbf{p}\}|), \quad (35)$$

где  $|\mathbf{X}|$  – определитель (детерминант) квадратной матрицы  $\mathbf{X}$ ;  $\text{dg}(\mathbf{x})$  – оператор диагонализации вектора  $\mathbf{x}$ ;  $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1, \dots, l}$  – вектор вероятностей связности (работоспособности) ребер и вершин.

А метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий отрицаний пересечений событий связности сечений (31), как:

$$P(S) = \sum_{i=1}^{s'} |\text{dg}[\text{sign}(\mathbf{Y}^{(i)} \odot \mathbf{Y}^{(i)}) \odot \mathbf{p} + (\mathbf{1}_l - \mathbf{p})]| \times \prod_{k=1}^{\max(\mathbf{Y}^{(i)})} (1 - |\text{dg}\{\text{sign}[(\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l) \odot (\mathbf{Y}^{(i)} - k\mathbf{1}_l)] \odot \mathbf{p} + (\mathbf{1}_l - \mathbf{p})\}|). \quad (36)$$

Применение разработанных методов разберем на примере мостикового графа  $G$  (рисунок 1) и определим его вероятность связности. Предположим, что вероятности связности ребер одинаковы  $P(l_j) = p = 0,9, j = 1, \dots, j$ .

Используя  $\mathbf{W}_t$  матрицу путей и формулу (32) найдем  $\mathbf{S}_t$  приведенную матрицу путей, на основе которой по предложенным процедурам по приведению несвязных событий к объединению независимых в виде рекурсии с использованием формул (33)–(34) определим  $\mathbf{Y}_t$  матрицу независимых событий связности:

$$\mathbf{Y}_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, но с использованием  $\mathbf{W}_s$  матрицы сечений определим  $\mathbf{Y}_s$  матрицу независимых событий несвязности:

$$\mathbf{Y}_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с  $Y_t$  матрицей независимых событий слагаемых в выражении (35) всего четыре, т. е.  $s' = 4$ . Тогда вероятность связности графа  $G$  определяется как:

$$P(S) = 1 - [0,1^2 + 0,9 \cdot 0,1^2 \cdot (1 - 0,9^2) + 0,9 \cdot 0,1^2 + 0,9^2 \cdot 0,1^3] = \\ = 1 - (0,01 + 0,00171 + 0,009 + 0,00081) = 0,97848.$$

Аналогично получается результат на основе  $Y_s$  матрицы независимых событий несвязности. В выражении (36) слагаемых также четыре и вероятность связности графа  $G$  определяется как:

$$P(S) = 0,9^2 + 0,1 \cdot 0,9^2 \cdot (1 - 0,1^2) + 0,1 \cdot 0,9^2 + 0,1^2 \cdot 0,9^3 = \\ = 0,81 + 0,08019 + 0,081 + 0,00729 = 0,97848.$$

Как и следовало ожидать, результаты оказались идентичными.

Сравнительная оценка эффективности предложенного метода проведена относительно метода двудольных графов на полностью связном графе, так как в графах произвольной структуры (двух- и многополюсные) нельзя определить число простых цепей (путей).

На рисунке 5 приведены зависимости числа  $n$  анализируемых элементарных конструкций (конъюнкций) от количества  $v$  вершин полностью связного графа. Анализ показывает наличие выигрыша в вычислительной сложности метода многопеременной инверсии по сравнению с методом двудольных графов лишь для полностью связных графов с количеством вершин меньше восьми. Однако при использовании сечений и абсолютно надежных вершин многопеременная инверсия демонстрирует выигрыш, стремящийся к двум, при росте количества вершин (для более, чем восемнадцати вершин погрешность менее 0,1%):

$$\frac{n'_d}{n_s} = 2 - 2^{2-v} v.$$

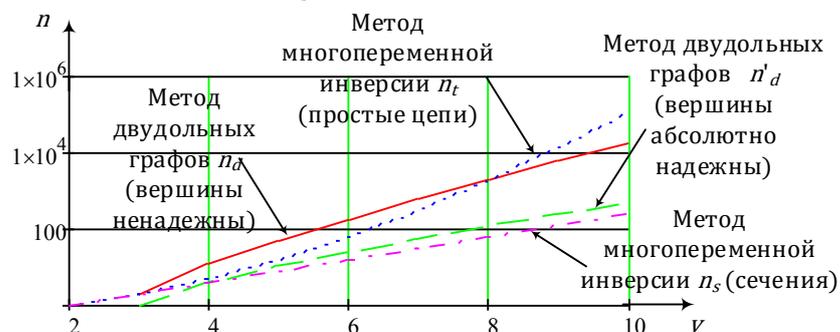


Рисунок 5 – Зависимости числа  $n$  анализируемых элементарных конструкций (конъюнкций) от количества  $v$  вершин полностью связного графа

**В четвертом разделе** представлен метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости, и его анализ на примере магистральной кабельной сети.

Существует два класса механизмов обеспечения отказоустойчивости: защитного переключение (protection) и динамического восстановления (restoration). При этом выделяют четыре архитектуры защитного переключения:

$1 + 1, 1:n, (1:1)^n, m:n$ , а также шесть разновидностей защищаемых участков элементов сети: линия, узел, маршрут, сегмент, кольцо,  $p$ -цикл.

Для описания предложенного метода все возможные элементы маршрутов любой из архитектур защитного переключения представим в виде трех групп. Первая – фиксированные участки, постоянные неизменяемые части путей, задается как вектор  $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=1, \dots, l+v}$  элементов исходного графа. Вторая – резервируемые участки, представляется в форме матрицы  $\mathbf{S} = \{s_{i,j}\}_{i=1, \dots, l+v, j=1, \dots, n}$ , каждый столбец которой эквивалентен одному из  $n$  резервируемых участков. Третья – резервирующие участки, представляется в форме матрицы  $\mathbf{T} = \{t_{i,j}\}_{i=1, \dots, l+v, j=1, \dots, m}$ , каждый столбец которой эквивалентен одному из  $m$  резервирующих участков.

В качестве основы рассматриваются в общем случае  $n$  основных маршрутов в форме простых цепей с независимыми защищаемыми участками. Матрица резервируемых участков выбирается исходя из максимальной величины коэффициента готовности между заданными элементами исходного графа с учетом их независимости и невключенности в фиксированную часть маршрута:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max[\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \text{ если } \min_{j=1, \dots, s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\},$$

$$\mathbf{s}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max[\mathbf{s} + \text{sign}(\mathbf{S}\mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \text{ если } \min_{j=1, \dots, s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\}, i = 2, \dots, n,$$

где  $\mathbf{W} = \{w_{i,j}\}_{i=1, \dots, l+v, j=1, \dots, s}$  – матрица путей между истоком и стоком резервируемых участков;  $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1, \dots, l+v}$  – вектор вероятностей связности (работоспособности) ребер и вершин.

Тогда основные маршруты (резервируемые) представляются в виде матрицы путей:

$$\mathbf{R} = \mathbf{s}\mathbf{1}_n^T + \mathbf{S}.$$

Аналогично  $m$  маршрутов, содержащих резервирующие участки, также задаются в форме простых цепей с независимыми резервируемыми и резервирующими участками. Матрица резервирующих участков выбирается исходя из максимальной величины коэффициента готовности между заданными элементами исходного графа с учетом их независимости и невключенности в фиксированную часть маршрута и резервируемые участки:

$$\mathbf{T}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max[\text{sign}(\mathbf{R}\mathbf{1}_n) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \text{ если } \min_{j=1, \dots, s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\},$$

$$\mathbf{T}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max[\text{sign}(\mathbf{R}\mathbf{1}_n) + \text{sign}(\mathbf{T}\mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \text{ если } \min_{j=1, \dots, s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\},$$

$$i = 2, \dots, m.$$

Резервирующие маршруты представляются в виде матрицы путей:

$$\mathbf{R} = \mathbf{s}\mathbf{1}_m^T + \mathbf{T}.$$

В работе для архитектур защитного переключения с учетом особенностей каждой из них представлены соответствующие выражения для матрицы путей  $\mathbf{R}$ , столбцы которой соответствуют основным и резервирующим маршрутам.

Для схемы 1 + 1 исходный основной путь дополняется резервным (резервирующим). Следовательно, матрицы резервируемых  $\mathbf{S}$  и резервирующих  $\mathbf{T}$  участков редуцируются в векторы, а матрица простых цепей  $\mathbf{R}$  содержит два столбца: первый  $\mathbf{R}^{(1)}$  указывает на основной маршрут, а второй  $\mathbf{R}^{(2)}$  – на резервирующий путь основного пути, обладающий максимальным коэффициентом готовности из всех возможных альтернатив:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S},$$

$$\mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{s} + \mathbf{T}.$$

Для схемы 1:  $n$   $n$  исходных основных путей дополняются одним резервным. Тогда матрица  $\mathbf{S}$  содержит  $n$  столбцов, матрица  $\mathbf{T}$  редуцируется в вектор, а матрица простых цепей  $\mathbf{R}$  содержит  $n + 1$  столбец. Первый столбец  $\mathbf{R}^{(1)}$  эквивалентен последовательному соединению фиксированного и всех резервируемых участков, а  $n$  остальных  $\mathbf{R}^{(i)}$ ,  $i = 2, \dots, n + 1$ , – такому же соединению, за исключением замены одного из резервируемых участков на резервирующий:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{1}_n,$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} - \mathbf{S}^{(i-1)} + \mathbf{T}, i = 2, \dots, n + 1.$$

Для схемы  $(1:1)^n$  каждый из  $n$  исходных основных путей дополняется одним резервным. Тогда матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  содержат по  $n$  ( $m = n$ ) столбцов, а матрица простых цепей  $\mathbf{R}$  содержит  $2^n + 1$  столбец. Первый столбец  $\mathbf{R}^{(1)}$  эквивалентен последовательному соединению фиксированного и всех резервируемых участков, а  $2^n$  остальных  $\mathbf{R}^{(i)}$ ,  $i = 2, \dots, 2^n + 1$ , – такому же соединению с последовательной заменой одного или нескольких резервируемых участков на соответствующие резервирующие:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{1}_n,$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + (\mathbf{T} - \mathbf{S})\mathbf{C}_n^{(i-1)}, i = 2, \dots, 2^n + 1,$$

где  $\mathbf{C}_n = [\mathbf{C}_{1,n} | \mathbf{C}_{2,n} | \dots | \mathbf{C}_{n,n}]$  – блочная матрица сочетаний размером  $n \times 2^n$ ,  $\mathbf{C}_{i,n}$  – матрица сочетаний из  $i$  по  $n$  размером  $n \times C_n^i$ , каждый столбец которой содержит  $i$  единиц и соответствует определенному сочетанию из  $i$  по  $n$ ;  $C_n^i$  – число сочетаний из  $i$  по  $n$ .

Для схемы  $m:n$   $n$  исходных основных путей дополняются  $m$  резервными. Тогда матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{T}$  участков содержат по  $n$  и  $m$  столбцов соответственно, а матрица простых цепей  $\mathbf{R}$  содержит  $\sum_{i=0}^m C_n^i C_m^i$  столбец. Первый столбец  $\mathbf{R}^{(1)}$  эквивалентен последовательному соединению фиксированного и всех резервируемых участков, а  $\sum_{i=1}^m C_n^i C_m^i$  остальных  $\mathbf{R}^{(i)}$ ,  $i = 2, \dots, \sum_{i=0}^m C_n^i C_m^i$ , – такому же соединению с последовательной заменой одного или нескольких резервируемых участков на резервирующие:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{1}_n,$$

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{T}\mathbf{M}_t^{(i-1)} - \mathbf{S}\mathbf{M}_s^{(i-1)}, i = 2, \dots, \sum_{i=0}^m C_n^i C_m^i,$$

где  $\mathbf{M}_t = \left[ \mathbf{1}_{C_n^1}^T \otimes \mathbf{C}_{1,m} \mid \mathbf{1}_{C_n^2}^T \otimes \mathbf{C}_{2,m} \mid \dots \mid \mathbf{1}_{C_n^m}^T \otimes \mathbf{C}_{m,m} \right]$  – блочная матрица размещений размером  $n \times \sum_{i=1}^m C_n^i C_m^i$ , каждый столбец которой соответствует комбинации последовательного перебора резервирующих маршрутов, начиная с одного и заканчивая всеми, а затем резервируемых;  $\otimes$  – кронекеровское произведение;

$\mathbf{M}_s = \left[ \mathbf{1}_{C_n^1}^T \otimes \mathbf{C}_{1,m}^{(1)} \mid \mathbf{1}_{C_n^1}^T \otimes \mathbf{C}_{1,m}^{(2)} \mid \dots \mid \mathbf{1}_{C_n^1}^T \otimes \mathbf{C}_{1,m}^{(n)} \mid \dots \mid \mathbf{1}_{C_n^2}^T \otimes \mathbf{C}_{2,m}^{(1)} \mid \dots \mid \mathbf{1}_{C_n^m}^T \otimes \mathbf{C}_{m,m}^{(m)} \right]$  – блочная матрица размещений размером  $n \times \sum_{i=1}^m C_n^i C_m^i$ , каждый столбец которой соответствует комбинации последовательного перебора резервируемых маршрутов, начиная с одного и заканчивая всеми, а затем резервирующих.

Механизмы восстановления не используют предварительно настроенных резервирующих маршрутов и подразумевают необходимость обработки протоколов сигнализации после повреждения, что обеспечивает гибкость планирования маршрутов. В результате любой путь является потенциальным вариантом для организации резервирующего участка. Используя требование к минимальному количеству альтернативных маршрутов, эквивалентному числу  $n$  резервируемых путей в механизме защитного переключения, в работе рассмотрен весь спектр маршрутов исходного графа в качестве резервирующих, условие их независимости не оказывается критическим.

Из всего набора исходных путей остаются только независимые от фиксированных участков путей, в результате чего формируется матрица  $\mathbf{S}$  независимых альтернативных участков:

$$\mathbf{S}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \min_{j=1, \dots, S} j, \text{ если } \max[\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1 \right\},$$

$$\mathbf{S}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \min_{j=1, \dots, S} j, \text{ если } \max[\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \mathbf{W}^{(j)} \neq \mathbf{S}^{(k)}, k = 1, \dots, i - 1 \right\}, i = 2, \dots$$

На основе матрицы  $\mathbf{S}$  формируется матрица путей  $\mathbf{R}$ , содержащая набор столбцов, каждый из которых эквивалентен подграфу, включающему фиксированные участки и  $n$  альтернативных независимых маршрутов:

$$\mathbf{R} = \mathbf{s} + \mathbf{S}\mathbf{C}_{n, \text{cols}(\mathbf{S})}\mathbf{C}_0,$$

где  $\mathbf{C}_0$  – матрица редукции размером  $C_{\text{cols}(\mathbf{S})}^n \times k$ , элементы которой равны нулю, за исключением единичных элементов на строках с номерами равными номерам ненулевых столбцов матрицы  $\mathbf{S}\mathbf{C}_{n, \text{cols}(\mathbf{S})}$  и последовательно упорядоченных номерах столбцов, начиная с первого;  $k$  – количество ненулевых столбцов матрицы  $\mathbf{S}\mathbf{C}_{n, \text{cols}(\mathbf{S})}$ .

Предложенный метод анализа надежности телекоммуникационной сети, поддерживающий механизмы обеспечения отказоустойчивости, использующий разбиение элементов основного и резервного маршрутов на группы, совместно с применением метода многопеременной инверсии позволяет учесть эффекты дублирования элементов в различных маршрутах и, как следствие, устранить неточности оценки коэффициента готовности относительно методов, использующих допущение о независимости путей передачи информации.

В работе представлен анализ надежности телекоммуникационной сети предложенным методом на примере транспортной сети, основой которой является магистральная кабельная сеть юга России, в которой применяются механизмы обеспечения отказоустойчивости.

Влияние характеристик телекоммуникационной сети на ее итоговую надежность рассмотрено с позиции коэффициентов готовности элементов сети, на основе которых определяются значения вероятности связности сети в целом (ГОСТ Р 53111–2008). Коэффициенты готовности узлов и отдельной линии связи рассчитываются на основе модели последовательного соединения элементов.

Предполагается, что на узле находится, по крайней мере, один кросс-коннектор или мультиплексор ввода-вывода, работающий сразу на все допустимые направления связи, и, исходя из стандартных значений среднего времени наработки на отказ и восстановления для данного оборудования, коэффициент готовности любого узла равен 0,99994.

Коэффициент готовности отдельных линий связи вычисляется для волоконно-оптических систем передачи на основе протяженности, рассчитываемой по географическим координатам городов, между которыми развернута данная линия связи.

Результаты расчетов надежности сети предложенным методом представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1 – Параметры надежности сети с защитным переключением

Участок	1+1	2:1	(1:1) <sup>2</sup>	2:2
линия	0,99966	0,99080	0,99083	0,99442
узел	0,99984	0,98214	0,99607	0,99880
сегмент	0,99284	0,98352	0,99072	0,99586
маршрут	0,99981	0,98411	0,98889	0,99472
кольцо	0,99985	0,95771	0,96665	0,96921
<i>p</i> -цикл	0,99986	0,95771	0,96431	0,96804

Таблица 2 – Параметры надежности сети с восстановлением

Число маршрутов	Без резервирования	С восстановлением
один	0,99266	0,99988
два	0,98280	0,99889

Из проведенного анализа видно, что использование механизмов обеспечения отказоустойчивости с применением методов защитного переключения и восстановления приводит к росту надежности сети. Так, для случая одного требуемого маршрута передачи (рисунок 6) предпочтительнее оказываются методы защитного переключения за исключением применения защитного переключения на участках – сегмент, что связано с особенностями топологии рассматриваемой сети. Реализация механизмов восстановления оказывается несколько нецелесообразной вследствие незначительного прироста

коэффициента готовности в случае одного резервного маршрута. Однако для двух резервных маршрутов механизм восстановления обеспечивает существенный рост коэффициента готовности сети (рисунок 7).

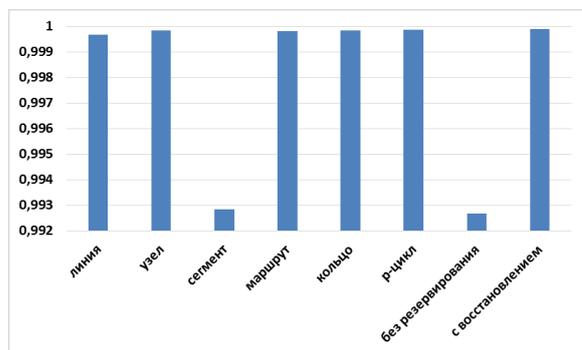


Рисунок 6 – Надежность сети с единственным маршрутом

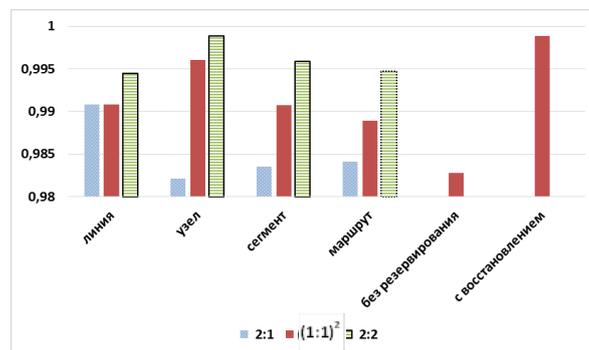


Рисунок 7 – Надежность сети с двумя альтернативными маршрутами

Разработанную методику оценки надежности сетей так же можно применить и к сетям передачи данных, поддерживающих механизмы обеспечения отказоустойчивости, в узлах которых могут находиться как маршрутизаторы, так и коммутаторы.

Вопросы, связанные с оперативностью переключения на резервные каналы в работе, не учитывались и требуют дальнейшего уточнения.

В **заключении** отражены основные результаты проведенных исследований и разработок, которые заключаются в следующем.

1. Проведен анализ механизмов обеспечения отказоустойчивости в телекоммуникационных сетях, показавший их важную роль в итоговой надежности соединения при отказах элементов сети.

2. Проведен анализ известных аналитических методов точной оценки надежности сети показавший, что определение показателей надежности является трудноразрешимой задачей и не все существующие методы способны ее решить для большого количества элементов сети за приемлемое время и различных мер связности.

3. Разработаны процедуры формирования множеств простейших подграфов телекоммуникационной сети для:

- двухполюсной связности в виде путей на основе алгоритма поиска в ширину и отбора соответствий по стокам;

- всеполюсной связности в виде остовых деревьев путем анализа декартовых произведений вершинных сечений на связность результирующих графов и уникальность ребер;

- многополюсной связности в виде многополюсных деревьев на основе проверки листьев графа на принадлежность к множеству полюсов;

- двухполюсной связности в виде двухполюсных минимальных сечений на основе проверки сочетаний вершинных сечений на безызбыточность;

– всеполюсной связности в виде всеполюсных минимальных сечений путем анализа декартовых произведений вершинных сечений, включающих исток и сток, на их уникальность;

– многополюсной связности в виде многополюсных минимальных сечений, на основе отбора сечений, содержащих только полюсные вершины.

В результате выигрыш во времени вычисления в среднем по проведенным экспериментам достигает величины до 1,8 раза большей относительно известных методов.

4. Разработана рекурсивная процедура приведения событий несвязности к объединению независимых событий, позволяющая в отличие от известных на основе метода многопеременных инверсий отрицания пересечения событий связности графа получать простые формы перехода логических функций к замещению, используемые для расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети.

5. Разработаны методы расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети на основе многопеременных инверсий:

– отрицания пересечения событий связности графа, формируемых на основе множеств подграфов путей, остовых деревьев или многополосных деревьев;

– отрицания пересечения событий несвязности графа, формируемых на основе множеств подграфов минимальных двухполюсных, всеполюсных или многополюсных сечений.

В результате число анализируемых подграфов в ходе процесса редукции исходного графа уменьшается относительно известных методов в два раза при росте количества вершин (для более, чем восемнадцати вершин погрешность менее 0,1%).

6. Разработан метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости: защитного переключения (protection), и восстановления (restoration), гарантирующего наличие от одного до нескольких маршрутов передачи между заданными источником и стоком, позволяющий учесть эффекты дублирования элементов и снять ограничение о независимости путей передачи информации в сложноразветвленных сетях.

7. Проведен анализ надежности телекоммуникационной сети, основой которой является магистральная кабельная сеть юга России, поддерживающая механизмы обеспечения отказоустойчивости.

### **Список публикаций по теме диссертации**

**Работы, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Scopus:**

1. Фокин, А. Б. Методы формирования множеств состояний телекоммуникационных сетей для различных мер связности/ А. Б. Фокин, А. А. Батенков, К. А. Батенков// Труды СПИИРАН. – 2020. – Т. 19, № 3. – С. 644–673.

2. Фокин, А. Б. Формирование сечений телекоммуникационных сетей для анализа их устойчивости с различными мерами связности/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, А. А. Батенков// Информатика и автоматизация. – 2021. – Т. 20, № 2. – С. 371–406.

3. Фокин, А. Б. Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, А. А. Батенков// Информационно-управляющие системы. – 2021. – № 6 (115). – С. 53–63.

4. Фокин, А. Б. Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети на основе инверсий ее состояний/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, А. А. Батенков// Управление, вычислительная техника и информатика. – 2022. – № 59. – С. 91–98.

### **Работы, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, рекомендованных ВАК:**

5. Фокин, А. Б. Способ расчета надежности сложноразветвленных систем/ А. Б. Фокин// Информационные системы и технологии. – 2019. – № 6 (116). – С. 101–108.

6. Фокин, А. Б. Метод расчета вероятностей связности (коэффициентов готовности) телекоммуникационной сети, поддерживающей механизмы обеспечения отказоустойчивости/ А. Б. Фокин// Информационные системы и технологии. – 2023. – № 4 (138). – С. 83–91.

### **Публикации в сборниках трудов международных научно-технических конференций и форумов:**

7. Фокин, А. Б. Формирование множества деревьев в телекоммуникационных сетях с всеполюсной связностью/ А. Б. Фокин// «СТНО-2020»: межд. науч.-техн. форум/ Рязанский государственный радиотехнический университет. – Рязань, 2020. – С. 163–169.

8. Фокин, А. Б. Формирование множества путей в телекоммуникационных сетях с двухполюсной связностью/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, А. Н. Переверзев// «ИСТ-2020»: межд. науч.-практ. конф./ Институт радиоэлектроники и информационных технологий Нижегородского государственного технического университета. – Нижний Новгород, 2020. – С. 486-492.

9. Фокин, А. Б. Формирование множества многополюсных деревьев в телекоммуникационных сетях/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, А. Н. Орешин// «АПИНО-2020»: межд. науч.-техн. и науч.-метод. конф./ Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича. – Санкт-Петербург, 2020. – С. 115-119.

10. Фокин, А. Б. Расчет надежности сети методом объединения связанных подграфов с поглощением/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков, Д. Ю. Шелковый// Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. – Ростов-на-Дону: СКФ МТУСИ. – 2019. – № 1. – С. 66–71.

11. Фокин, А. Б. Защита трафика в транспортных сетях при авариях с применением методов восстановления и переключения/ А. Б. Фокин, К. А. Батенков// Общество. Наука. Инновации. НПК-2022: Сборник статей XXII Всероссийской научно-практической конференции./ ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет». – Киров, 2022. – С. 268–275.

#### **Авторские патенты и программы для ЭВМ:**

1. Фокин, А. Б. Способ регулирования надежности сложноразветвленных систем. Пат. 2713849 Российская Федерация Н04L 12/801/ А. Б. Фокин [и др.]; заявитель и патентообладатель ФГКВООУ ВО Академия ФСО России. – № 2019112469; заявл. 24.04.2019; опубл. 07.02.2020, бюл. № 4.

2. Фокин, А. Б. Программный модуль для нахождения  $k$ -минимальных остовых деревьев: свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2021614146 от 10.03.2021 г. РФ/ А. Б. Фокин [и др.] – № 2021612829; заявл. 10.03.2021 г.; зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 19.03.2021 г.